№1-дәріс

2 және 3-ретті анықтауыштарды есептеу жолдары. Олардың қасиеттері.

Анықтауыштар

Анықтама 1. Қандай да бір ретпен алынған $(1, 2, ..., n)$ сандарынан құралған жиынтық алмастыру деп аталады және $j = (j_1, j_2, ..., j_n)$ түрінде жазылады.

$(1, 2, ..., n)$ алмастыруы негізгі деп аталады, ал екі элементтің орнын ауыстырудан пайда болған алмастыру – осы элементтердің транспозициясы деп аталады.

Теорема 1. Егер қандай да бір алмастыру негізгісінен N_1 мен N_2 транпозицияларын қолдану нәтижесінде пайда болған болса, онда N_1 мен N_2 транспозициялары не бірдей жұп, не екеуі де бірдей тақ .

Мысал 1. $(3, 2, 1)$ алмастыруын негізгісінен келесі транспозицияларды қолдану арқылы алуға болады:

а) $(1,2,3) \Rightarrow (3,2,1)$, яғни, 1 мен 3 элементтерінің орнын ауыстырдық және $N_1 = 1$,

б) $(1,2,3) \Rightarrow (2,1,3) \Rightarrow (2,3,1) \Rightarrow (3,2,1)$ $N_2 = 3$.

Бұл жерден N_1 мен N_2 сандарының екеуі де тақ екенін көруге болады.

$j = (j_1, j_2, ..., j_n)$ алмастыруын негізгі алмастырудан алу кезінде қолданылатын транспозициялар санын $t(j)$ деп белгілелік.

Анықтама 2. n -ші ретті анықтауыш немесе детерминант деп

$$\Delta = |a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

түрінде жазылған және төмендегідей формуламен есептелінетін санды айтамыз:

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \qquad (2)$$

мұндағы қосынды $j = (j_1, j_2, ..., j_n)$ алмастыруының барлық мүмкін әртүрлі мәндері үшін таралған.

(2)-дегі қосылғыштар саны $n!$ тең.

Анықтама 2-ден бірден мына теңдікке көз жеткізуге болады:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Мысалдар: 2) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 17$

3) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot(-2) - 4\cdot 0 = -6$

4) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-5) - (-2)\cdot 3 = 5 + 6 = 11$.

Ескерту. Егер анықтауыштың элементтері қандай да бір функциялар болса, онда бұл анықтауыш та функция болады(сан болуы да мүмкін).

Мысалы,

5) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

6) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

7) $\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ \frac{1}{2} & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$.

Анықтама 3. a_{ik} элементінің M_{ik} миноры деп (1)-ден i-ші жол мен k-шы бағанды сызып тастау нәтижесінде пайда болған $n-1$-ші ретті анықтауышты айтамыз. $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ шамасы a_{ik} элементінің алгебралық толықтауышы деп аталады.

8) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауышы берілген.

a_{23} элементінің сәйкес M_{23}, A_{23} тап.

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2\cdot(-2) = 5; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\cdot M_{23} = -5 .$$

ІІІ-ші ретті анықтауышты есептеу үшін үшбұрыштар ережесін қолданамыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 2 + 4(-1)\cdot(-3) - (-3)\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot 1 - 5\cdot(-1)\cdot 1 = 71$$

Анықтауыштың қасиеттері

1. Анықтауыштың мәні

1. өзгермейді, егер оның жолдарын (бағандарын) сәйкес бағандармен (жолмен) алмастырсақ,

2. таңбасын өзгертеді, егер екі жолдың (бағанның) орындарын алмастырсақ,
3. k ($k \neq 0$) санына көбейтіледі, егер қандай да бір жолдың (бағанның) барлық элементтерін k санына көбейтсек,
4. нөлге тең, егер кез келген жолдың (бағанның) барлық элементтері нөлге тең болса,
5. нөлге тең, егер қандай да бір екі жолдың (бағанның) сәйкес элементтері тең болса немесе пропорционал болса.
6. Кез келген жолдың элементтеріне басқа бір жолдың сәйкес элементтерін қандай да бір нөлге тең емес санға көбейтіп, қосқаннан анықтауыштың мәні өзгермейді.

Анықтауышты есептеу әдістері:

А) жолының (бағанының) элементтері бойынша жіктеу

Қандай да бір жолдың (бағанның) элементтерінің осы элементтің сәйкес алгебралық толықтауышына көбейтінділерінің қосындысы анықтауыштың мәніне тең.

Б) Анықтауыштың бас диагоналінің жоғарғы және төменгі жағында орналасқан элементтердің барлығы нөлге тең болса, ондай анықтауыш үшбұрышты түрге келтірілген анықтауыш деп аталады. Бұл жағдайда анықтауыш бас диагоналдің элементтерінің көбейтіндісіне тең. Кез келген анықтауышты үшбұрышты түрге келтіру үнемі мүмкін.

10) а) 3-ші бағанның элементтері бойынша жіктеу арқылы анықтауыштың мәнін есепте

б) 1-ші жолдың элементтері бойынша жіктеу арқылы анықтауышты есепте

а)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 10 = 2\,.$$

б) $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$